Sinais e Sistemas - ESP208

Mestrado Profissional em Engenharia de Sistemas e Produtos - Transformada de Fourier (DTFT) e Amostragem

Fabrício Simões

IFBA

20 de setembro de 2017

Parte I

Conceitos Básicos

Conceitos Básicos

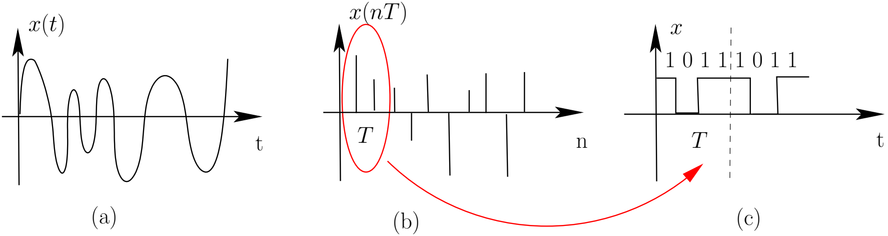
- Sinal : Função (ou uma grandeza física) de uma ou mais variáveis que transporta algum tipo de informação.

Exemplos

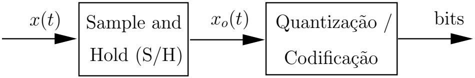
Sinal de voz, de vídeo, de um sensor, sinal de recepção e de transmissão, sinal de erro, sinal dos sensores de pressão, de temperatura, entre outros.

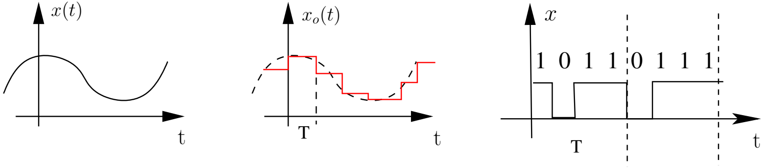
Tipos de Sinais

- Sinal Contínuo (Sinal Analógico): Contínuo no tempo e na amplitude;
- Sinal Digital: Trem de pulsos cuja amplitude varia em níveis discretos;
- Sinal Quantizado: Contínuo no tempo e discretizado na amplitude;
- Sinal Discreto: Discretizado no tempo e contínuo na amplitude.

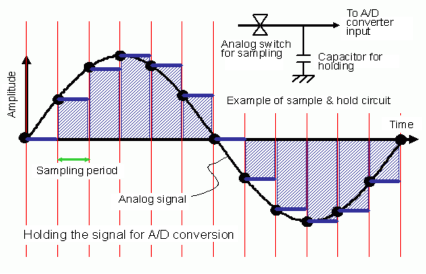


Conversão Analógico-Digital





- Cada amostra = palavra digital;
- Sequência digital : 1011 0111;
- Representação Matemática: Sinal discreto $x(T)$ $x(2T)$.



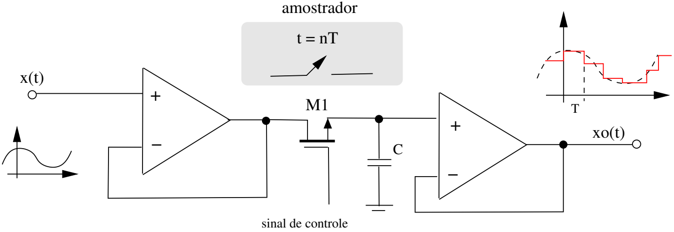
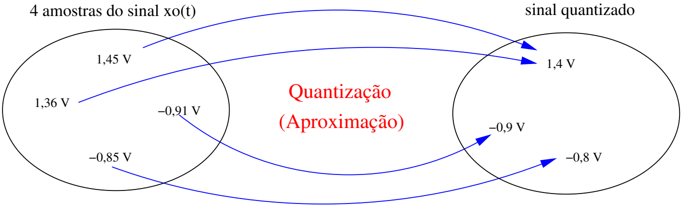


Figura 1 : Diagrama simplificado do circuito Sample and Hold.

Passos 2 e 3 : Quantização e Codificação.

- O valor das amostras de sinal na saída do circuito *Sample and Hold* são aproximadas para um conjunto finito de valores, chamados de níveis de quantização.

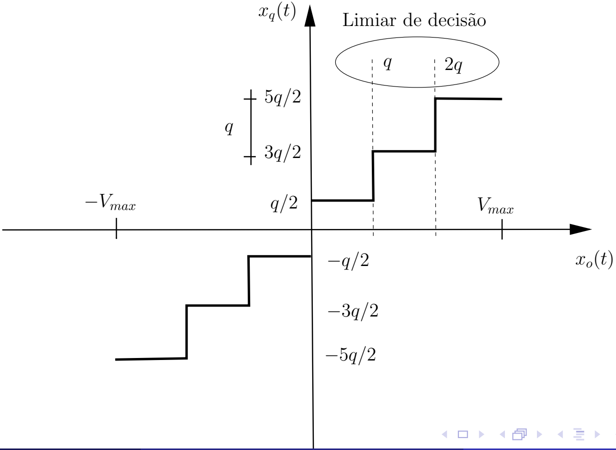


- *L* Níveis de Quantização : {...; 1,4V; -0,9V; -0,8V; ...}.
- Código Binário de *N* bits : {(10), (11) e (01) }

Erro de Quantização - Ruído de Quantização

$$x_q(t) = \begin{cases} 3q/2 & \text{se } x_o(t) > q; \\ q/2 & \text{se } x_o(t) \leq q, \end{cases}$$

.



Relação Sinal-Ruído de Quantização e Padrões Comerciais

$$SNR_q = \frac{L^2 q^2/4}{q^2/12} = 3L^2$$

- Bons dispositivos de audio possuem relação sinal/ruído entre 60 e 70 dB. Esta faixa é atingida com conversores de 12 bits ou mais.
- Padrões Comerciais

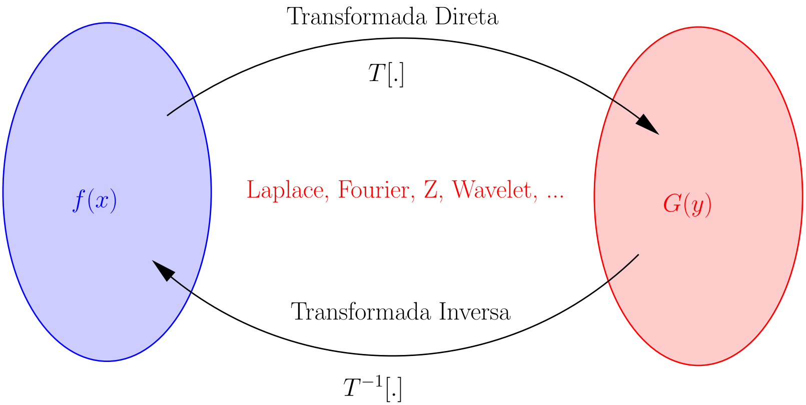
Padrão Comercial	Freq. de Amostragem	Nbits	Níveis de Quantiz.
CD	44100 Hz	16	65536
Voz	8000 Hz	8	256
Arduino	9600 Hz	10	1024
DSP Texas C6416	96000 Hz	16	65536

Parte II

Transformada de *Fourier* de Sinais Discretos (DTFT)

A ideia da Transformada

- Transformar : Mudar o domínio da variável.



Transformada de Fourier para Sinais Discretos (DTFT)

- Transformada Direta

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT}$$

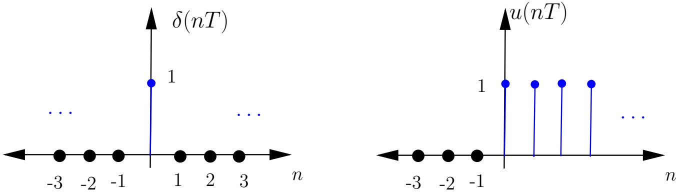
- Transformada Inversa

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_d(\omega)e^{j\omega nT}d\omega$$

- Intervalo de *Nyquist*: $[-\pi/T, \pi/T)$ devido à aplicação do teorema da amostragem de *Nyquist*, $\omega_a \geq 2\omega_{max}$

Transformada de Fourier - Exercícios

- Determine a Transformada de Fourier dos sinais abaixo:
  1. $x(nT) = \delta(nT)$;
  2. $x(nT) = a^{nT}u(nT)$.
- Sinais Básicos



Propriedades da Transformada de Fourier

Linearidade

$$ax(nT) + by(nT) \overset{F}{\leftrightarrow} aX_d(\omega) + bY_d(\omega)$$

Deslocamento no Tempo e na Frequência

$$x((n \pm n_o)T) \overset{F}{\leftrightarrow} e^{\pm j\omega n_o T} X_d(\omega)$$

$$y(nT) = x(nT)e^{\pm j\omega_o nT} \overset{F}{\leftrightarrow} Y_d(\omega) = X_d(\omega \mp \omega_o)$$

Propriedades da Transformada de Fourier

Reflexão no Tempo

$$x(nT) \overset{F}{\leftrightarrow} X_d(\omega)$$

$$x(-nT) \overset{F}{\leftrightarrow} X_d^*(\omega)$$

Teorema da Convolução

$$x(nT) \otimes h(nT) \overset{F}{\leftrightarrow} X_d(\omega)H_d(\omega)$$

Propriedades da Transformada de Fourier

Produto no Tempo

$$x(nT)y(nT) \overset{F}{\leftrightarrow} \left(\frac{X_d(\omega) \otimes Y_d(\omega)}{2\pi/T} \right)$$

Teorema de *Parseval*

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(nT)|^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X_d(\omega)|^2 d\omega$$

Exercícios

1. Determine a Transformada de Fourier dos sinais abaixo:

    1. $x(nT) = k$

    2. $x(nT) = \mathrm{sen}(\omega_o nT)$

    3. $x(nT) = e^{jm\omega_o nT}$

Parte III

Teorema da Amostragem

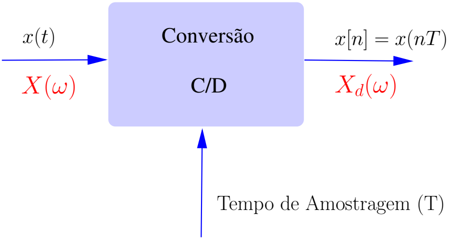
Amostragem de Sinais Contínuo no Tempo

1. Uma sequência de amostras é obtida a partir de sinais contínuos no tempo de acordo com a relação

$$x[n] = x(nT) = x(t)|_{t=nT},$$

no qual T é o tempo de amostragem e $\omega_a = 2\pi/T$, frequência de amostragem.

2. Representação ideal do Conversor Contínuo-Discreto.

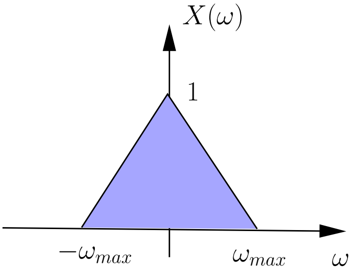


Representação Gráfica entre $X_d(\omega)$ e $X(\omega)$

1. Relação entre $X(\omega)$ e $X_d(\omega)$ é dada por

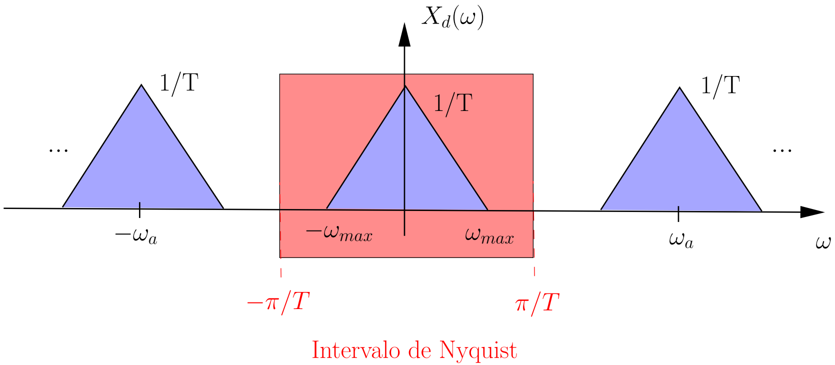
$$X_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_a),$$

Por exemplo, considere um sinal $x(t)$ cuja Transformada de *Fourier* é mostrada abaixo



Relação entre as Frequências de Amostragem (ω_a) e Máxima do Sinal (ω_{max})

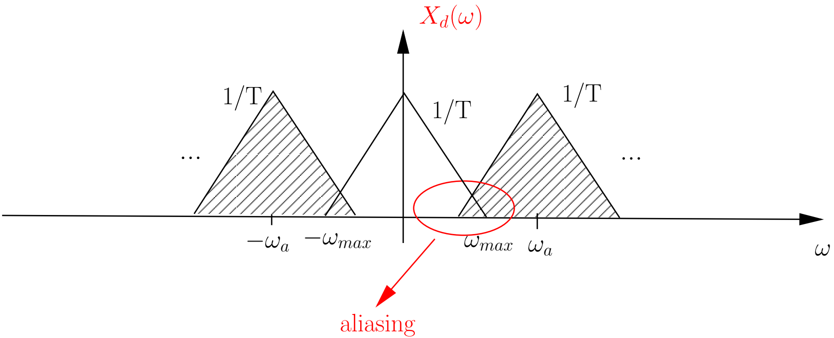
1. Para $\omega_a > 2\omega_{max}$.



2. Preservação do espectro original de $x(t)$.

Relação entre as Frequências de Amostragem (ω_a) e Máxima do Sinal (ω_{max})

- Para $\omega_a < 2\omega_{max}$.



- Devido ao *aliasing*, o espectro de frequência original do sinal não é preservado.

Teorema da Amostragem

- Um sinal contínuo $x(t)$ limitado em banda somente pode ser recuperado a partir de suas amostras se a frequência de amostragem ω_a for no mínimo igual ao dobro da frequência máxima ω_{max}.

$$\omega_a \geq 2\omega_{max}$$

Exercícios

- Sabe-se que um sinal de tempo contínuo $x_a(t)$ pode ser recuperado de forma única a partir de suas amostras $x_a(nT)$ quando $T = 1ms$. Qual é a freqüência mais alta de $X_a(f)$?

- Suponha que $x_a(t)$ seja limitado em faixa a 8kHz (isto é, $X_a(f) = 0$ para $|f| > 8000$), qual é a taxa de *Nyquist* para $x_a(t)$?

- A Figura apresenta o espectro dos sinais $f_1(t)$ e $f_2(t)$. Determine a taxa de amostragem de Nyquist para o sinal $f_1(t)f_2(t)$.